



## MATHÉMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

### ESQUISSE DE CORRIGE

#### EXERCICE 1 (06 points)

Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose :

$$P(z) = z^3 - (4 + 11i)z^2 + (-33 + 32i)z + 60 + 27i.$$

1) a) Calculer  $P(3i)$ .

(0,25 pt)

$$\begin{aligned} P(3i) &= (3i)^3 - (4 + 11i)(3i)^2 + (-33 + 32i)(3i) + 60 + 27i \\ &= -27i + 36 + 99i - 99i - 96 + 60 + 27i \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Déterminer  $g(z)$  tel que  $P(z) = (z - 3i)g(z)$ .

(0,5 pt)

|      |   |            |             |             |
|------|---|------------|-------------|-------------|
|      | 1 | $-4 - 11i$ | $-33 + 32i$ | $60 + 27i$  |
| $3i$ |   | $3i$       | $24 - 12i$  | $-60 - 27i$ |
|      | 1 | $-4 - 8i$  | $-9 + 20i$  | 0           |

$$g(z) = z^2 + (-4 - 8i)z - 9 + 20i = 0$$

c) Trouver les racines de  $g$ .

(0,5 pt)

$$\Delta' = (-2 - 4i)^2 - 1(-9 + 20i) = 4 + 16i - 16 + 9 - 20i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Ainsi,  $\delta = 1 - 2i$  est une racine carrée de  $\Delta'$ .

$$\text{Les racines de } g \text{ sont alors : } z_1 = \frac{(2+4i)+(1-2i)}{1} = 3 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{(2+4i)-(1-2i)}{1} = 1 + 6i.$$

**Les racines de  $g$  sont  $3 + 2i$  et  $1 + 6i$ .**

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Les points  $A, B$  et  $C$  ont pour affixes respectives  $z_A = 3 + 2i$ ,  $z_B = 3i$  et  $z_C = 1 + 6i$ . Soit  $D$  le barycentre du système  $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$  et  $z_D$  son affixe.

a) Calculer les distances  $AB, AC$  et  $BC$ , puis en déduire la nature du triangle  $ABC$ .

(01 pt)

$$\text{➤ } AB = |z_B - z_A| = |3i - 3 - 2i| = |-3 + i| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{➤ } AC = |z_C - z_A| = |1 + 6i - 3 - 2i| = |-2 + 4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{➤ } BC = |z_C - z_B| = |1 + 6i - 3i| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

On a  $AB = BC$ , donc le triangle  $ABC$  est isocèle de sommet principal  $B$ .

$$\text{De plus, } AB^2 + BC^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20 \text{ et } AC^2 = 20.$$

On a  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

Conclusion : Le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $B$ .

b) Vérifier que  $z_D = 4 + 5i$ .

(0,25 pt)

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = (3 + 2i) - (3i) + (1 + 6i) = 4 + 5i.$$

c) Déterminer le module et un argument de  $\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}$ , puis en déduire la nature du triangle  $DAC$ . (0,75 pt)

$$z_A - z_D = 3 + 2i - 4 - 5i = -1 - 3i; z_C - z_D = 1 + 6i - 4 - 5i = -3 + i.$$

$$\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{i(i - 3)}{i - 3} = i.$$

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} \right| = 1 \text{ signifie que } \frac{DA}{DC} = 1, \text{ c'est-à-dire } DA = DC.$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ signifie que } (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

On déduit de ces deux derniers résultats que le triangle  $DAC$  est rectangle et isocèle en  $D$ .

3) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

(0,5 pt)

Soit  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Désignons par  $K$  son centre et  $r$  son rayon.

Le point  $K$  est le milieu de  $[AC]$ , donc  $z_K = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = 2 + 4i$ .

Le rayon  $r$  est égale à  $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ .

$$KD = |z_D - z_K| = |4 + 5i - 2 - 4i| = |2 + i| = \sqrt{5}.$$

$KD = r$ , donc  $D \in (C)$ .

Ainsi, les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent au cercle de centre  $K$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

4) On pose  $Z = \frac{-z_B(1+i)}{1+i\sqrt{3}}$ .

a) Ecrire  $Z$  sous forme algébrique.

(0,25 pt)

$$Z = \frac{-3i(1+i)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(3-3i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{-3-3\sqrt{3}}{4}i$$

b) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $-z_B(1+i)$  et  $1+i\sqrt{3}$ .

(01 pt)

$$\Rightarrow -z_B(1+i) = -3i(1+i) = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\text{Ainsi, } |-z_B(1+i)| = 3\sqrt{2} \text{ et } \arg(-z_B(1+i)) = -\frac{\pi}{4} (2\pi).$$

$$\Rightarrow 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\text{Ainsi, } |1+i\sqrt{3}| = 2 \text{ et } \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} (2\pi).$$

c) En déduire le module et un argument de  $Z$ , puis les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ . (01 pt)

$$\Rightarrow |Z| = \left| \frac{-z_B(1+i)}{1+i\sqrt{3}} \right| = \frac{|-z_B(1+i)|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{➤ } \arg(Z) = \arg\left(\frac{-z_B(1+i)}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(-z_B(1+i)) - \arg(1+i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12} \quad (2\pi).$$

$$\text{On en déduit que } Z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

$$\text{D'après les questions précédentes, on a : } Z = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{-3-3\sqrt{3}}{4}i \text{ et } Z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right).$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{3-3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-3-3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

## **EXERCICE 2** (04 points)

Dans cet exercice, les outils mathématiques au programme de Terminale S2 utilisés par l'élève sont les "Probabilités".

En prévision de l'élection du maire d'une ville, prévue en 2027, entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les personnes interrogées, 1200 ont déclaré leur intention de vote. Les 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

Un agent de l'institut estime qu'il y a 529 chances sur 1000 pour qu'une personne choisie vote effectivement pour le candidat A.

**Consigne :** A l'aide des informations fournies et les outils mathématiques au programme, confirme ou infirme les propos de l'agent.

Traduction des données

Soit :

A1 l'évènement « la personne interrogée déclare vouloir voter pour le candidat A »

B1 l'évènement « la personne interrogée déclare vouloir voter pour le candidat B »

A2 l'évènement « la personne interrogée a effectivement voté pour le candidat A »

B2 l'évènement « la personne interrogée a effectivement voté pour le candidat B »

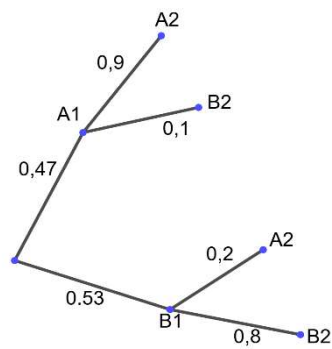
D'après les informations fournies, on a :

$$p(A1) = 0,47, \text{ on en déduit que } p(B1) = 0,53.$$

$$p(B2/A1) = 0,1, \text{ on en déduit que } p(A2/A1) = 0,9 ;$$

$$p(A2/B1) = 0,2, \text{ on en déduit que } p(B2/B1) = 0,8.$$

L'arbre pondéré qui illustre la situation est :



Donc,  $p(A2) = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2 = 0,529$

Ainsi, il y a 529 chances sur 1000 pour qu'une personne choisie vote effectivement pour le candidat A.

**Commentaire :** Les quatre points seront distribués comme suit :

- Traduction correcte des données **1,5 point** ;
- Utilisation correcte de la formule des probabilités totales ou arbre pondéré **1,5 point** ;
- Interprétation correcte du résultat **1point**.

**PROBLEME (10 points)**

**Commentaire :** dans les trois parties qui suivent, le correcteur doit tenir compte de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats dans l'appréciation des copies des candidats.

**PARTIE A (01,5 point)**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$ .

1) Dresser le tableau de variations de  $g$ .

(01,25 pt)

$$D_g = \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 - \ln 1 = 0$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x(\frac{1}{e^x} + 2)} - \ln(1 + 2e^x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 2} - \ln(1 + 2e^x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{e^x(1+2e^x) - 2e^x \times e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x}$$

$$g'(x) = -\frac{e^x + 4e^{2x}}{(1+2e^x)^2}, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0.$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | -         |
| $g$     | 0         | $-\infty$ |

2) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ .

(0,25 pt)

D'après le tableau de variations,  $g(]-\infty, +\infty[) = ]-\infty, 0[$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ .

**PARTIE B (7,5 points)**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ x + \ln \left| \frac{3x-3}{x+1} \right| & \text{si } x < 0 \end{cases}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1 cm.

1) Montrer que l'ensemble de définition  $D_f$ , de  $f$ , est égal à  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

(0,5 pt)

$$f(x) \text{ existe si, et seulement si } \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 + 2e^x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ \frac{3x-3}{x+1} \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ existe si, et seulement si } x \geq 0 \text{ ou } \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ si, et seulement si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2) Démontrer que  $f$  est continue en 0.

(0,5 pt)

$$f(0) = \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) = \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \ln \left| \frac{3x-3}{x+1} \right| = \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln 3, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 3 = f(0), \text{ donc } f \text{ est continue en } 0.$$

3) Exprimer  $f(x)$  sans la notation « valeur absolue ».

(0,5 pt)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ x + \ln \left( \frac{3x-3}{x+1} \right) & \text{si } x < -1 \\ x + \ln \left( \frac{-3x+3}{x+1} \right) & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

4) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,75 pt)

Supposons que  $-1 < x < 0$ . Alors  $f(x) = x + \ln \left( \frac{-3x+3}{x+1} \right)$ .

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x + \ln \left( \frac{-3x+3}{x+1} \right) - \ln 3}{x} = 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$  en posant  $t = -x$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 - 1 - 1 = -1$  donc  $f$  est dérivable à gauche en 0 et  $f'_g(0) = -1$ .  $(C_f)$  admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur  $-1$ .

b) On suppose que  $f$  est dérivable à droite en 0 et que  $f'_d(0) = -2 \ln 3 + \frac{2}{3}$ .  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

(0,25 pt)

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ , donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

5) Pour  $x \geq 0$ , on pose  $t = 1 + 2e^x$ .

a) Montrer que  $f(x) = \frac{4t}{(t-1)^2} \times \frac{\ln t}{t}$ .

(0,5 pt)

$$t = 1 + 2e^x \Rightarrow e^x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{t-1}{2}$$

$$e^{-2x} = \frac{1}{(e^x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2} = \frac{4}{(t-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{4}{(t-1)^2} \ln t = \frac{4t}{(t-1)^2} \times \frac{\ln t}{t}$$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(0,75 pt)

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty; \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{(t-1)^2} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .

6) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $-1$ . Interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus.

(0,75 pt)

Supposons que  $x < -1$ , alors  $f(x) = x + \ln\left(\frac{3x-3}{x+1}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Supposons que  $x < 0$ , alors  $f(x) = x + \ln\left|\frac{3x-3}{x+1}\right|$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à  $(C_f)$ .

7) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + \ln 3$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ . (0,5 pt)

Supposons que  $x < -1$ , alors  $f(x) = x + \ln\left(\frac{3x-3}{x+1}\right) = x + \ln\left[3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = x + \ln 3 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ , or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ , donc la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + \ln 3$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

8) Montrer que :

a)  $\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$ . (0,5 pt)

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$$

$$\text{Donc } f'(x) = -2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^x}{1+2e^x} e^{-2x} = 2e^{-2x} \left[ \frac{2e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] = 2e^{-2x}g(x).$$

b)  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[, f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ . (0,5 pt)

$$\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[, f(x) = x + \ln\left|\frac{3x-3}{x+1}\right|$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

9) Etudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,75 pt)

$$\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[, f'(x) \text{ est du signe de } x^2 - 1$$

En résumé, on a :

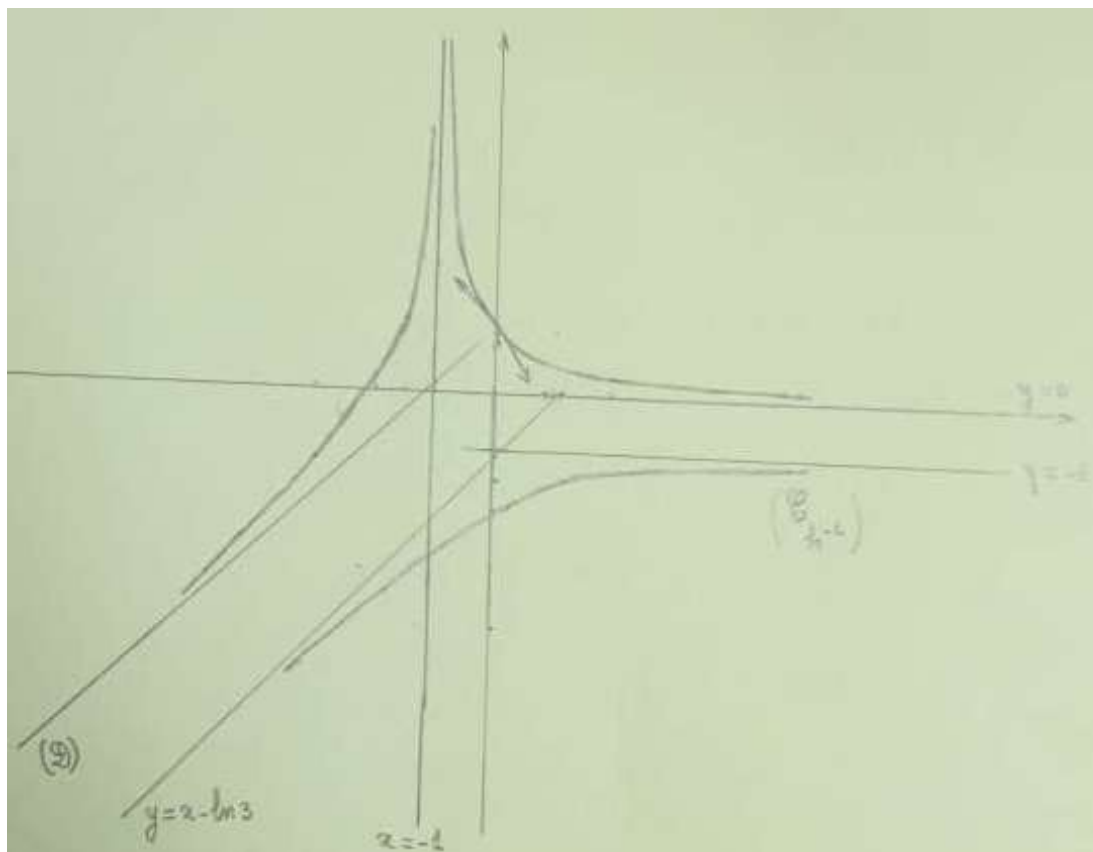
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[;$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

|         |           |           |         |           |
|---------|-----------|-----------|---------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       |           | $-$     | $-$       |
| $f$     | $-\infty$ | $+\infty$ | $\ln 3$ | $0$       |

10) Construire  $(C_f)$  et ses asymptotes.

(0,75 pt)



**PARTIE C (01 point)**

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty, -1[$ .

1) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty, -1[$  sur un intervalle à préciser.

(0,25 pt)

La fonction  $h$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty, -1[$ , donc  $h$  est une bijection de  $]-\infty, -1[$  sur  $h(]-\infty, -1[) = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

2) Construire la courbe  $(C_{h^{-1}})$  de  $h^{-1}$ , bijection réciproque de  $h$  ainsi que ses asymptotes dans le plan muni du même repère.

(0,75 pt)

[Voir figure précédente](#)