



UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
 OFFICE DU BACCALAUREAT
 E-mail : office@ucad.edu.sn
 site web : officedubac.sn

2026 A 26 N°1
 Durée : 4 heures
 Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non-imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude

(Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

ESQUISSE DE CORRIGE

EXERCICE 1 : (5 points)

Les agents du service chargé de sécuriser les épreuves d'un concours communiquent entre eux en utilisant un système de codage qui fonctionne de la manière suivante :

- ✓ À chaque lettre d'un message, on associe son rang x dans l'alphabet français.
Ainsi, $A \rightarrow 0$; $B \rightarrow 1$; ... $Z \rightarrow 25$.
- ✓ La lettre codée correspondant à la lettre initiale est celle dont le rang dans l'alphabet français est le nombre y tel que $y \equiv 7x + \beta[26]$ où β est le reste de la division euclidienne de $5^{(2^\delta-1)}$ par $2^\delta - 1$, δ étant le nombre dont l'écriture en base 16 est : $\delta = \overline{189E1} - \overline{187D8}$.

Partie I

1. Soient l et k deux entiers naturels non nuls.

- a) Montrer que $2^{lk} - 1$ est divisible par $2^l - 1$ et $2^k - 1$.

On a :

$$2^{lk} - 1 = (2^l)^k - 1 = (2^l - 1) \sum_{j=0}^{k-1} 2^{lj}$$

Or, $\sum_{j=0}^{k-1} 2^{lj}$ est un entier, donc $(2^l - 1)$ divise $2^{lk} - 1$.

0,25 pt

On montre de même que $(2^k - 1)$ divise $2^{lk} - 1$.

0,25 pt

- b) En déduire que si $2^p - 1$ est un nombre premier, alors p est un nombre premier.

Supposons que p n'est pas premier.

Il existe alors deux entiers non nuls l et k tels que $p = lk$ avec $1 < l < p$ et $1 < k < p$.

D'après la question précédente, $2^{lk} - 1$ est divisible par $2^l - 1$ et $2^k - 1$.

Il reste à vérifier que $2^l - 1$ et $2^k - 1$ ne sont pas des diviseurs triviaux de $2^p - 1$.

En effet, étant donné que $1 < l < p$, $1 = 2^1 - 1 < 2^l - 1 < 2^p - 1$.

On en déduit que $2^p - 1$ admet un diviseur différent de 1 et différent de lui-même ; il n'est donc pas premier.

Par conséquent, si $2^p - 1$ est un nombre premier, alors p est un nombre premier.

0,5 pt

- c) Le nombre $\Gamma = 2^{11} - 1$ est-il premier ? Que pensez-vous alors de la réciproque de la proposition résultant de la question b)

➤ On a : $\Gamma = 23 \times 89$. Donc, Γ n'est pas premier.

0,25 pt

➤ La réciproque n'est pas vraie car $p = 11$ est premier, mais $\Gamma = 2^{11} - 1$ n'est pas premier.

0,25 pt

2. Montrer que $\delta = 521$, puis justifier que δ est un nombre premier.

Montrons que $\delta = 521$.

$$\begin{aligned} \triangleright \overline{189E1} &= 1 \times 16^4 + 8 \times 16^3 + 9 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 100833. \\ \triangleright \overline{187D8} &= 1 \times 16^4 + 8 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 100312 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \delta = 100833 - 100312 = 521.$$

0,5 pt

Montrons que δ est premier.

$$\text{On a } \sqrt{521} \approx 22,82$$

$$\begin{aligned} 521 &\equiv 1[2]; 521 \equiv 2[3]; 521 \equiv 1[5]; 521 \equiv 3[7]; 521 \equiv 4[11]; 521 \equiv 1[13]; 521 \equiv 11[17]; \\ 521 &\equiv 8[19] \end{aligned}$$

Donc, 521 est premier.

0,25 pt

3. En admettant que $2^\delta - 1$ est un nombre premier, montrer que $\beta = 5$.

On pourra utiliser le petit théorème de Fermat dont l'énoncé est le suivant :

Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel non nul x , on a : $x^p \equiv x [p]$.

Le nombre $2^\delta - 1$ est premier ; d'après le petit théorème de Fermat, on a :

$$5^{(2^\delta - 1)} \equiv 5[2^\delta - 1]$$

Ce qui signifie que $\beta = 5$.

0,5 pt

4. Montrer que l'équation $y \equiv 7x + 5[26]$ est équivalente à l'équation $x \equiv 15y + 3[26]$.

$$y \equiv 7x + 5[26] \Leftrightarrow 15y \equiv 105x + 75[26]$$

Or, $105 \equiv 1[26]$ et $75 \equiv -3[26]$, donc

$$y \equiv 7x + 5[26] \Leftrightarrow 15y \equiv x - 3[26]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 15y + 3[26]$$

0,5 pt

Partie II

1. a) Montrer que la lettre codée correspondant à la lettre N est S.

Le rang de la lettre N est $x = 13$, donc $y \equiv 96[26]$. On en déduit que $y = 18$.

Donc, la lettre codée correspondant à N est S.

0,25 pt

- b) Déterminer le message codé correspondant au message N G O R.

$\triangleright$ Le rang de la lettre G est $x = 6$, donc $y \equiv 47[26]$. On en déduit que $y = 21$

Donc, la lettre codée correspondant à G est V.

0,25 pt

$\triangleright$ Le rang de la lettre O est $x = 14$, donc $y \equiv 103[26]$. On en déduit que $y = 25$

Donc, la lettre codée correspondant à O est Z.

0,25 pt

$\triangleright$ Le rang de la lettre R est $x = 17$, donc $y \equiv 124[26]$. On en déduit que $y = 20$

Donc, la lettre codée correspondant à R est U.

0,25 pt

Le message codé correspondant au message N G O R est S V Z U.

2. Un des agents a reçu un message codé L F I C. Décoder ce message.

$\triangleright$ Le rang de la lettre L est $y = 11$, donc $x \equiv 168[26]$. On en déduit que $x = 12$.

Donc, la lettre initiale codée par L est M.

- Le rang de la lettre **F** est $y = 5$, donc $x \equiv 78[26]$. On en déduit que $x = 0$.
Donc, la lettre initiale codée par F est **A**.
- Le rang de la lettre **I** est $y = 8$, donc $x \equiv 123[26]$. On en déduit que $x = 19$.
Donc, la lettre initiale codée par I est **T**.
- Le rang de la lettre **C** est $y = 2$, donc $x \equiv 33[26]$. On en déduit que $x = 7$.
Donc, la lettre initiale codée par C est **H**.

Le message décodé est **M A T H**.

0,75 pt

EXERCICE 2 : (5 points)

Partie I

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 :

- l'urne U_1 contient 10 jetons numérotés de 11 à 20 ;
- l'urne U_2 contient trois boules marquées 0, deux boules marquées 4, et une boule marquée 2 ;
- l'urne U_3 contient deux boules marquées 0, trois boules marquées -4 , et une boule marquée 6.

Dans chaque urne, les éléments sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste d'abord à tirer simultanément deux jetons de l'urne U_1 :

- ✓ si on obtient deux nombres premiers, on tire successivement avec remise deux boules dans U_2 ;
- ✓ sinon, on tire successivement sans remise deux boules dans U_3 .

Dans chacun des cas, le nombre marqué sur la première boule est noté α et celui marqué sur la deuxième boule est noté β .

A chaque résultat (α, β) de l'épreuve, on associe l'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ du plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans lui-même qui, à tout point $M(z)$ associe la point $M'(z')$ tel que :

$$z' = \frac{\alpha}{4} e^{\frac{i\pi\beta}{24}} z + i .$$

Au premier tirage, la probabilité d'obtenir deux nombres premiers est $\frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

La probabilité de ne pas obtenir un nombre premier est alors $\frac{13}{15}$.

1. Montrer que la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une isométrie est $\frac{43}{90}$.

L'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ est une isométrie $\Leftrightarrow \alpha = 4$ ou $\alpha = -4$ (β peut prendre n'importe quelle valeur)

0,25 pt

La probabilité est : $\frac{2}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{13}{15} \times \frac{3}{6} = \frac{4+39}{15 \times 6} = \frac{43}{90}$.

0,25 pt

2. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une translation.

L'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ est une translation $\Leftrightarrow \alpha = 4$ et $\beta = 0$.

0,25 pt

La probabilité est : $\frac{2}{15} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{45}$.

0,25 pt

3. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une homothétie.

L'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ est une homothétie $\Leftrightarrow \alpha \neq 4$ et $\alpha \neq -4$ et $\beta = 0$ ou $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.

0,25 pt

La probabilité est : $\frac{2}{15} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{13}{15} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{109}{450}$.

0,25 pt

4. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une rotation.

L'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ est une rotation $\Leftrightarrow \alpha = 4$ et $\beta \neq 0$ ou $\alpha = -4$ et β quelconque.

0,25 pt

La probabilité est : $\frac{2}{15} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{13}{15} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{41}{90}$.

0,25 pt

5. On effectue cette épreuve n fois de suite ($n \geq 2$) et de manière indépendante.
Déterminer la plus petite valeur de n pour être sûr à au moins 99% d'obtenir au moins une fois une isométrie.

Notons p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois une isométrie.

$$p_n = 1 - \left(\frac{47}{90}\right)^n$$

0,25 pt

« Être sûr à au moins 99% » signifie que la probabilité est supérieure ou égale à 0,99.

Ainsi, on a $p_n \geq 0,99$. Ce qui équivaut à $n \geq 7,09$.

La plus petite valeur de n est donc $n_0 = 8$.

0,25 pt

Partie II

On note $S = t \circ \Psi_{2,6}$, où t est la translation de vecteur $-\vec{e}_2$ et $\mathcal{H}$ la courbe d'équation : $x^2 - 2x - 4y^2 = 0$.

1. a) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre Ω et l'excentricité e .

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y^2 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

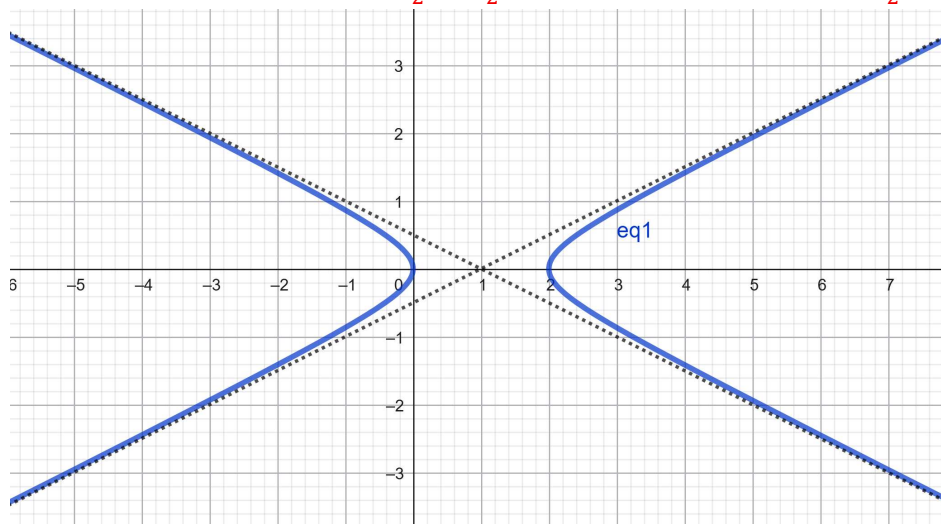
0,25 pt

La courbe $\mathcal{H}$ est l'hyperbole de centre $\Omega(1,0)$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

0,25 pt

- b) Construire la courbe $\mathcal{H}$ avec ses asymptotes.

Les asymptotes sont la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



- c) Montrer que l'image $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ par S a pour équation cartésienne dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

L'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)z$

L'expression analytique de S est :
$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{4}(x+y) \end{cases}$$

0,25 pt

Ce qui équivaut à :
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}(x' + y') \\ y = \sqrt{2}(-x' + y') \end{cases}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}(x' + y')\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}(x' + y')\right) - 4\left(\sqrt{2}(-x' + y')\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x'^2 + 3y'^2 - 10x'y' + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$$

Donc, la courbe $\mathcal{H}'$ a pour équation cartésienne dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

0,25 pt

2. On pose : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

a) Justifier que le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé direct.

On a : $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

0,25 pt

b) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{H}'$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

0,25 pt

$$M \in \mathcal{H}' \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4Y^2 - X = 0.$$

Dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{H}'$ a pour équation : $X^2 - 4Y^2 - X = 0$.

0,25 pt

c) Montrer que $\mathcal{H}'$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les foyers.

$$\mathcal{H}' : \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - 4Y^2 = \frac{1}{4}$$

En multipliant par 4, on obtient :

$$\frac{\left(X - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

La courbe $\mathcal{H}'$ est une hyperbole.

Dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

➤ Le centre est $\Omega' \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

➤ Les foyers sont $F \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right)$ et $F' \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right)$

Dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

En utilisant les formules de changement de repère $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$, on obtient :

➤ Le centre est $\Omega' \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

➤ Les foyers sont $F \left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8}, \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8}\right)$ et $F' \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}, \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}\right)$

PROBLEME : (10 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}(2+x)^n e^{-x}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A : (2,5 points)

1. a) Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variations.

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = (2+x)e^{-x}$.

Elle est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a : $f_1'(x) = e^{-x} - (2+x)e^{-x}$

$$f_1'(x) = (-x-1)e^{-x}$$

0,25pt

On a : $e^{-x} > 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $-x-1$ sur $\mathbb{R}$.

$$f_1'(x) = 0 \text{ ssi } x = -1.$$

Ainsi si $x < -1$ alors $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$

et si $x > -1$ alors $f_1'(x) < 0$ donc f_1 est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.

0,25pt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2+x)e^{-x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2+x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2+x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} + xe^{-x} = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -Xe^X = 0$ avec $X = -x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

0,25pt

D'où le tableau de variations de f_1 .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$	e	0

0,25 pt

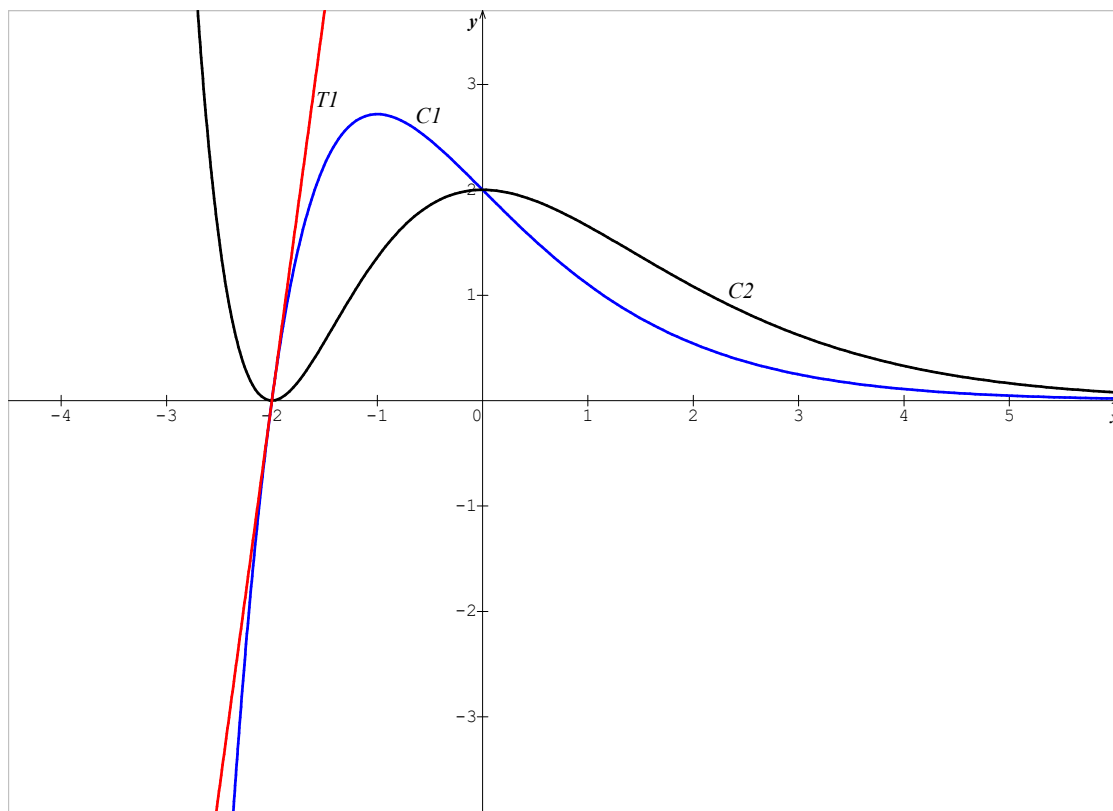
b) Tracer C_1 . On précisera sa tangente T_1 au point d'abscisse -2 .

➤ L'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse -2 : $= f_1'(-2)(x+2) + f_1(-2)$

$$T_1: y = e^2(x+2).$$

➤ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_1 en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) e^{-x} = +\infty \text{ donc } C_1 \text{ en } -\infty \text{ une branche parabolique de direction } (Oy).$$



C₁ : 0,5 pt

2. Soit β un réel tel que $\beta > -2$.

a) Déterminer, en unité d'aire, l'aire $A(\beta)$ du domaine délimité par C_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = -2 \text{ et } x = \beta.$$

$$\text{On a : } A(\beta) = \int_{-2}^{\beta} f_1(x) dx = \int_{-2}^{\beta} (2+x)e^{-x} dx.$$

En posant $u(x) = 2+x$ alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$ alors $v(x) = -e^{-x}$ donc

$$\int_{-2}^{\beta} (2+x)e^{-x} dx = [-(2+x)e^{-x}]_{-2}^{\beta} - \int_{-2}^{\beta} -e^{-x} dx$$

$$= [-(2+x)e^{-x}]_{-2}^{\beta} - [e^{-x}]_{-2}^{\beta}$$

$$= -(2+\beta)e^{-\beta} - e^{-\beta} + e^2$$

$$A(\beta) = -(2+\beta)e^{-\beta} - e^{-\beta} + e^2$$

0,5 pt

b) Déterminer la limite de $A(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat.

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -(2+\beta)e^{-\beta} + e^2 \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^{-x} - \beta e^{-\beta} - e^{-\beta} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta) = e^2.$$

0,25 pt

Cette limite représente l'aire du domaine non borné délimité par C_1 , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

0,25 pt

PARTIE B : (4,5 points)

1. Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

Etudions la limite de f_n en $-\infty$.

Cas où n est impair.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{n!} (2+x)^n e^{-x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2+x)^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2+x)^n e^{-x} = -\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$.

Cas où n est pair.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{n!} (2+x)^n e^{-x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2+x)^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2+x)^n e^{-x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$.

0,25 pt

Etudions la limite de f en $+\infty$: elle ne dépend pas de la parité de n .

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} (2+x)^n e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^n x^n e^{-x} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^n = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1)^n X^n e^X = 0$ avec $X = -x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^n x^n e^{-x} = 0$ par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

0,25 pt

2. a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x , où f'_n est la dérivée de f_n .

On a : $x \mapsto (2+x)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De même $x \mapsto e^{-x}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

0,25 pt

Pour tout x réel on a : $f'_n(x) = \frac{1}{n!} [n(2+x)^{n-1} e^{-x} - (2+x)^n e^{-x}]$

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-x} (2+x)^{n-1} (-x+n-2).$$

0,25 pt

b) Dresser le tableau de variations de f_n suivant la parité de n .

Etudions le signe de $f'_n(x)$.

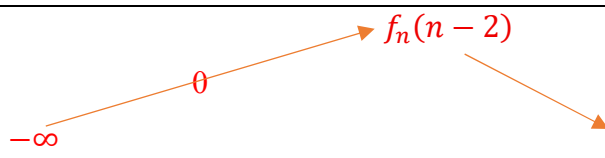
➤ Cas où n est impair : on a alors $n-1$ est pair

Dans ce cas, $e^{-x} (2+x)^{n-1} \geq 0$ et nul pour $x = -2$. Donc $f'_n(x)$ est du signe de $-x+n-2$

x	$-\infty$	-2	$n-2$	$+\infty$
$\frac{1}{n!} e^{-x} (2+x)^{n-1}$	+	0	+	+
$(-x+n-2)$	+	+	0	-
$f'_n(x)$	+	0	+	-

0,25 pt

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$	-2	$n-2$	$+\infty$	
$f'_n(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
f_n					

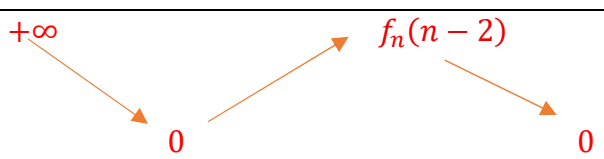
0,25 pt

➤ Cas où n est pair : on a alors $n-1$ est impair

x	$-\infty$	-2	$n-2$	$+\infty$	
$\frac{1}{n!}e^{-x}(2+x)^{n-1}$	$-$	0	$+$	$+$	
$(-x+n-2)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

0,25 pt

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$	-2	$n-2$	$+\infty$	
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f_n					

0,25 pt

c) Justifier que f_n admet un maximum y_n sur $[-2, +\infty[$ et que : $y_n = \frac{e^2}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Sur $[-2, +\infty[$ la dérivée de f_n s'annule et change de signe : d'après le tableau de variations pour tout n , f_n admet un maximum en $n-2$.

$$f_n(n-2) = \frac{1}{n!} (2+n-2)^n e^{-(n-2)}$$

$$= \frac{1}{n!} n^n e^{-n+2} = \frac{e^2}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

D'où : $y_n = \frac{e^2}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

0,25 pt

3. a) Pour tout x appartenant à $]-2, +\infty[$, calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, puis en déduire que $y_{n+1} = f_n(n-1)$.

On a : $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\frac{1}{(n+1)!} (2+x)^{n+1} e^{-x}}{\frac{1}{n!} (2+x)^n e^{-x}} = \frac{2+x}{n+1}$.

0,25 pt

Déduisons-en que $y_{n+1} = f_n(n-1)$.

On a : $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{2+x}{n+1}$ donc pour $x = n-1$, $\frac{f_{n+1}(n-1)}{f_n(n-1)} = \frac{2+n-1}{n+1} = 1$

Or $y_{n+1} = f_{n+1}(n-1)$ donc $y_{n+1} = f_n(n-1)$.

0,5 pt

b) Etudier alors le sens de variations de la suite (y_n) .

Puisque f_n est strictement décroissante sur $[n-2, +\infty[$ et que $n-1 > n-2$ on a :

$$y_{n+1} = f_n(n-1) < f_n(n-2) = y_n$$

On en déduit que $y_{n+1} < y_n$.

Ainsi la suite (y_n) est strictement décroissante.

0,5 pt

c) Montrer que (y_n) est convergente.

La suite (y_n) est décroissante et minorée par 0 car $y_n > 0$ pour tout $n \geq 2$.

Elle est donc convergente.

0,25 pt

On admettra pour la suite que (y_n) converge vers 0.

PARTIE C : (3,25 points)

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, on définit l'intégrale $I_n(x)$ par :

$$I_n(x) = \int_{-2}^x f_n(t) dt.$$

1. a) Démontrer que tout entier naturel k non nul, on a : $I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x}$.

$$\text{On a : } I_{k+1}(x) = \int_{-2}^x f_{k+1}(t) dt = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-2}^x (2+t)^{k+1} e^{-t} dt$$

On pose $u(x) = (2+t)^{k+1}$ donc $u'(x) = (k+1)(2+t)^k$ et $v'(t) = e^{-t}$ donc $v(t) = -e^{-t}$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+1}(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \left([-e^{-t}(2+t)^{k+1}]_{-2}^x - \int_{-2}^x -(k+1)(2+t)^k e^{-t} dt \right) \\ &= \frac{-1}{(k+1)!} e^{-x}(2+x)^{k+1} + \int_{-2}^x \frac{k+1}{(k+1)!} (2+t)^k e^{-t} dt \\ &= \frac{-(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x} + \int_{-2}^x \frac{1}{k!} (2+t)^k e^{-t} dt \\ &= \int_{-2}^x f_k(t) dt - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x} \end{aligned}$$

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x}.$$

1 pt

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_n(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^n}{n!e^x}.$$

On peut faire une démonstration par récurrence.

$$\text{Posons } P_n : I_n(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^n}{n!e^x}.$$

➤ P_1 est vraie

$$\text{En effet, } I_1(x) = -(2+x)e^{-x} - e^{-x} + e^2 = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x}.$$

➤ Supposons que P_k vraie et montrons que P_{k+1} est aussi vraie.

$$\begin{aligned}
 P_k \text{ vraie} &\Rightarrow I_k(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^k}{k!e^x} \\
 &\Rightarrow I_{k+1}(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^k}{k!e^x} - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x} \\
 &\Rightarrow I_{k+1}(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^k}{k!e^x} - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!e^x} \\
 &\Rightarrow P_{k+1} \text{ vraie}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \geq 1, I_n(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^n}{n!e^x}.$$

0,5 pt

2. Soit $\alpha \in [-2, +\infty[$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha + 2)y_n$.

On a : $I_n(\alpha) = \int_{-2}^{\alpha} f_n(t) dt$. Puisque y_n est le maximum de f_n sur $[-2; +\infty[$, $\forall t \in [-2; +\infty[$, $f_n(t) \leq y_n$.

Ainsi $I_n(\alpha) \leq \int_{-2}^{\alpha} y_n dt = (\alpha + 2)y_n$.

De plus $f_n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [-2, +\infty[$. Donc, $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha + 2)y_n$.

0,5 pt

b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

Puisque $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha + 2)y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0.$$

0,25 pt

3. Pour tout réel $x \in [-2, +\infty[$ pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$J_n(x) = 1 + \frac{2+x}{1!} + \frac{(2+x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2+x)^n}{n!}.$$

a) Montrer que : $J_n(x) = e^{2+x} - e^x I_n(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } I_n(x) &= e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^n}{n!e^x} \\
 &= e^2 - \frac{1}{e^x} \left(1 + \frac{2+x}{1!} + \frac{(2+x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2+x)^n}{n!} \right) \\
 &= e^2 - \frac{1}{e^x} J_n(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } J_n(x) = e^{2+x} - e^x I_n(x).$$

0,5 pt

b) Déterminer la limite de $J_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour $\alpha \geq -2$ on a : $J_n(\alpha) = e^{2+\alpha} - e^\alpha I_n(\alpha)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0$ donc pour $\alpha \geq -2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\alpha) = e^{2+\alpha}$.

0,5 pt

c) Soit (U_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Déterminer la limite de (U_n) .

On a : $U_n = J_n(-1)$

D'après la question précédente donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(-1) = e^{2-1} = e$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e.$$

0,25 pt