

**OFFICE DU BACCALAUREAT**E-mail : office@ucad.edu.snSite web : officedubac.sn**Epreuve du 1^{er} groupe****MATHÉMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (05 points)

Les agents du service chargé de sécuriser les épreuves d'un concours communiquent entre eux en utilisant un système de codage qui fonctionne de la manière suivante :

- À chaque lettre d'un message, on associe son rang x dans l'alphabet français.
Ainsi, $A \rightarrow 0$; $B \rightarrow 1$; ... $Z \rightarrow 25$.
- La lettre codée correspondant à la lettre initiale est celle dont le rang dans l'alphabet français est le nombre y tel que $y \equiv 7x + \beta[26]$, où β est le reste de $5^{(2^\delta-1)}$ dans la division euclidienne par $2^\delta - 1$, le nombre δ étant donné en base 16 par : $\delta = \overline{189E1} - \overline{187D8}$.

Partie I

1. Soient l et k deux entiers naturels non nuls.
 - a) Montrer que $2^{lk} - 1$ est divisible par $2^l - 1$ et $2^k - 1$. **0,5 pt**
 - b) En déduire que pour tout entier naturel p , si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier. **0,5 pt**
 - c) Le nombre $\Gamma = 2^{11} - 1$ est-il premier ? Que pensez-vous alors de la réciproque de la proposition résultant de la question b) **0,5 pt**
2. Montrer que $\delta = 521$, puis justifier que δ est un nombre premier. **0,75 pt**
3. En admettant que $2^\delta - 1$ est un nombre premier, montrer que $\beta = 5$. **0,5 pt**

On pourra utiliser le petit théorème de Fermat dont l'énoncé est le suivant :

Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel non nul x , on a : $x^p \equiv x [p]$.

4. Montrer que l'équation $y \equiv 7x + 5[26]$ est équivalente à l'équation $x \equiv 15y + 3[26]$. **0,5 pt**

Partie II

1. a) Montrer que la lettre codée correspondant à la lettre **N** est **S**. **0,25 pt**
b) Déterminer le message qui code le message **N G O R**. **0,75 pt**
2. Un des agents a reçu un message codé **L F I C**. Décoder ce message. **0,75 pt**

.../...2

EXERCICE 2 : (05 points)

Partie I

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 :

- l'urne U_1 contient 10 jetons numérotés de 11 à 20 ;
- l'urne U_2 contient trois boules marquées 0, deux boules marquées 4, et une boule marquée 2 ;
- l'urne U_3 contient deux boules marquées 0, trois boules marquées -4 , et une boule marquée 6.

Dans chaque urne, les éléments sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste d'abord à tirer simultanément deux jetons de l'urne U_1 :

- ✓ si on obtient deux nombres premiers, on tire successivement avec remise deux boules dans U_2 ;
- ✓ sinon, on tire successivement sans remise deux boules dans U_3 .

Dans chacun des cas, le nombre marqué sur la première boule est noté α et celui marqué sur la deuxième boule est noté β .

A chaque résultat (α, β) de l'épreuve, on associe l'application $\Psi_{\alpha, \beta}$ du plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans lui-même qui, à tout point $M(z)$ associe la point $M'(z')$ tel que :

$$z' = \frac{\alpha}{4} e^{\frac{i\pi\beta}{24}} z + i .$$

1. Montrer que la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une isométrie est $\frac{43}{90}$. **0,5 pt**
2. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une translation. **0,5 pt**
3. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une homothétie. **0,5 pt**
4. Calculer la probabilité pour que $\Psi_{\alpha, \beta}$ soit une rotation. **0,5 pt**
5. On effectue cette épreuve n fois de suite ($n \geq 2$) et de manière indépendante.
Déterminer la plus petite valeur de n pour être sûr à au moins 99% d'obtenir au moins une fois une isométrie. **0,5 pt**

Partie II

On note $S = t \circ \Psi_{2,6}$, où t est la translation de vecteur $-\vec{e}_2$ et $\mathcal{H}$ la courbe d'équation : $x^2 - 2x - 4y^2 = 0$.

1. a) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre Ω et l'excentricité e . **0,25 pt**
 b) Construire la courbe $\mathcal{H}$ avec ses asymptotes. **0,5 pt**
 c) Montrer que l'image $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ par S a pour équation cartésienne dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: **0,5 pt**

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 .$$
2. On pose : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.
 - a) Justifier que le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé direct. **0,25 pt**
 - b) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{H}'$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. **0,5 pt**
 - c) Montrer que $\mathcal{H}'$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les foyers. **0,5 pt**

.../...3

PROBLEME : (10 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!} (2+x)^n e^{-x}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE I : (02,75 points)

1. a) Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variations. 1 pt
 b) Tracer (C_1) . On précisera sa tangente T_1 au point d'abscisse -2 . 0,75 pt
2. Soit β un réel tel que $\beta > -2$.
 a) Déterminer, en unité d'aire, l'aire $A(\beta)$ du domaine délimité par (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \beta$. 0,5 pt
 b) Déterminer la limite de $A(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat. 0,5 pt

PARTIE II : (03,75 points)

On suppose dans cette partie que n est supérieur ou égal à 2.

1. Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt
2. a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x , où f_n' est la dérivée de f_n . 0,5 pt
 b) Dresser le tableau de variations de f_n suivant la parité de n . 1 pt
 c) Justifier que f_n admet un maximum y_n sur $[-2, +\infty[$ et que : $y_n = \frac{e^2}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. 0,25 pt
3. a) Pour tout x appartenant à $]-2, +\infty[$, calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, puis en déduire que $y_{n+1} = f_n(n-1)$. 0,75 pt
 b) Etudier alors le sens de variations de la suite (y_n) . 0,5 pt
 c) Montrer que (y_n) est convergente. 0,25 pt

On admettra pour la suite que (y_n) converge vers 0.

PARTIE III : (03,5 points)

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, on définit l'intégrale $I_n(x)$ par :

$$I_n(x) = \int_{-2}^x f_n(t) dt.$$

1. a) Démontrer que tout entier naturel k non nul, on a : $I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{(2+x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x}$. 1 pt
 b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : 0,5 pt

$$I_n(x) = e^2 - \frac{1}{e^x} - \frac{2+x}{1!e^x} - \frac{(2+x)^2}{2!e^x} - \dots - \frac{(2+x)^n}{n!e^x}.$$

.../...4

2. Soit $\alpha \in [-2, +\infty[$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha + 2)y_n$. **0,5 pt**

b) En déduire la limite de la suite (I_n) . **0,25 pt**

3. Pour tout réel $x \in [-2, +\infty[$ pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$J_n(x) = 1 + \frac{2 + x}{1!} + \frac{(2 + x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2 + x)^n}{n!}.$$

a) Montrer que : $J_n(x) = e^{2+x} - e^x I_n(x)$. **0,5 pt**

b) Déterminer la limite de $J_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$. **0,5 pt**

c) Soit (U_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Déterminer la limite de (U_n) . **0,25 pt**