

**OFFICE DU BACCALAUREAT**

E-mail: office@ucad.sn

Site web : officedubac.sn

Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1^{er} groupe**MATHÉMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formules ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (06 points)

Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - (4 + 11i)z^2 + (-33 + 32i)z + 60 + 27i.$$

- 1) a) Calculer $P(3i)$. (0,25 pt)
b) Déterminer $g(z)$ tel que $P(z) = (z - 3i)g(z)$. (0,5 pt)
c) Trouver les racines de g . (0,5 pt)
- 2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 3i$ et $z_C = 1 + 6i$. Soit D le barycentre du système $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$ et z_D son affixe.
 - a) Calculer les distances AB, AC et BC , puis en déduire la nature du triangle ABC . (01 pt)
 - b) Vérifier que $z_D = 4 + 5i$. (0,25 pt)
 - c) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}$, puis en déduire la nature du triangle DAC . (0,75 pt)
- 3) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,5 pt)
- 4) On pose $Z = \frac{-z_B(1+i)}{1+i\sqrt{3}}$.
 - a) Ecrire Z sous forme algébrique. (0,25 pt)
 - b) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $-z_B(1+i)$ et $1 + i\sqrt{3}$. (01 pt)
 - c) En déduire le module et un argument de Z , puis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$. (01 pt)

EXERCICE 2 (04 points)

En prévision de l'élection du maire d'une ville, prévue en 2027, entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les personnes interrogées, 1200 ont déclaré leur intention de vote. Les 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

Un agent de l'institut estime qu'il y a 529 chances sur 1000 pour qu'une personne choisie vote effectivement pour le candidat A.

Consigne : A l'aide des informations fournies et les outils mathématiques au programme, confirme ou infirme les propos de l'agent.

PROBLEME (10 points)

PARTIE A (01,5 point)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$.

- 1) Dresser le tableau de variations de g . (01,25 pt)
- 2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$. (0,25 pt)

PARTIE B (7,5 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ x + \ln \left| \frac{3x-3}{x+1} \right| & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

- 1) Montrer que l'ensemble de définition D_f , de f , est égal à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. (0,5 pt)
- 2) Démontrer que f est continue en 0. (0,5 pt)
- 3) Exprimer $f(x)$ sans la notation « valeur absolue ». (0,5 pt)
- 4) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,75 pt)
- b) On suppose que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = -2 \ln 3 + \frac{2}{3}$. f est-elle dérivable en 0 ? Justifier. (0,25 pt)
- 5) Pour $x \geq 0$, on pose $t = 1 + 2e^x$.
 - a) Montrer que $f(t) = \frac{4t}{(t-1)^2} \times \frac{\ln t}{t}$. (0,5 pt)
 - b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 pt)
- 6) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en -1 . Interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. (0,75 pt)
- 7) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + \ln 3$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$. (0,5 pt)
- 8) Montrer que :
 - a) $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$. (0,5 pt)
 - b) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[, f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. (0,5 pt)
- 9) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- 10) Construire (C_f) et ses asymptotes. (0,75 pt)

PARTIE C (01 point)

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, -1[$.

- 1) Montrer que h est une bijection de $]-\infty, -1[$ sur un intervalle à préciser. (0,25 pt)
- 2) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1} , bijection réciproque de h ainsi que ses asymptotes dans le plan muni du même repère. (0,75 pt)